

Порядок выполнения логических операций

1. Операции в скобках
2. Отрицание
3. Конъюнкция (логическое умножение)
4. Дизъюнкция (логическое сложение)
5. Импликация
6. Эквивалентность

Порядок выполнения логических операций в следующих формулах:

$$\overset{3}{A} \vee \overset{4}{B} \Rightarrow \overset{2}{C} \& \overset{5}{D} \Leftrightarrow \overset{1}{\neg A}$$

$$\overset{4}{A} \vee (\overset{1}{B} \Rightarrow \overset{3}{C}) \& \overset{5}{D} \Leftrightarrow \overset{2}{\neg A}$$

Задание 1

Определите, в каком порядке необходимо вычислять значение логического выражения:

1. $\bar{a} \wedge \bar{b}$
2. $a \wedge (b \wedge c)$
3. $(a \wedge b) \vee (c \wedge \bar{b})$
4. $a \vee \overline{b \wedge c}$
5. $a \wedge b \wedge \bar{a}$

Пример вычисления значения логического выражения:

$$(1 \vee 0) \wedge 1 \neg 0$$

Определить порядок вычисления

$$\overset{2}{(1 \vee 0)} \wedge \overset{3}{1} \vee \overset{4}{\neg} \overset{1}{0} \quad \text{используем таблицы истинности для логических операций}$$

$$\neg 0 = 1$$

$$(1 \vee 0) = 1$$

$$(1 \vee 0) \wedge 1 = 1$$

$$(1 \vee 0) \wedge 1 \vee \neg 0 = 1$$

Выполнить: учебник стр. 39 № 11, 6

Упражнения по записи высказываний в виде логических выражений

1. «Летом Петя поедет в деревню и, если будет хорошая погода, то он будет рыбачить»

A = Летом Петя поедет в деревню

B = будет хорошая погода

C = он будет рыбачить

$$F = A * (B \rightarrow C)$$

2. «Точка X принадлежит интервалу [A;B]»

$$F = (X \geq A) * (X \leq B)$$

3. «Точка X не принадлежит интервалу [A;B]»

$$F = (X < A) + (X > B)$$

Задание 2

Записать высказывание в форме логического выражения.

Определить значение выражения:

- Приставка есть часть слова, и она пишется отдельно со словом.
- Рыбу ловят сачком или крючком, или приманивают мухой или червячком.
- Буква «а» - первая буква в слове «аист» или «сова».
- Я поеду в Таллинн и, если встречу там друзей, то мы интересно проведем время.

§6. Порядок составления таблиц истинности для логических функций (логических выражений)

1. Определить количество строк в таблице истинности.
Количество строк = 2^n , где n – количество логических переменных.
2. Определить количество столбцов в таблице истинности, равное количеству логических переменных плюс количество логических операций.
3. Построить таблицу истинности с указанным количеством строк и столбцов.
4. Ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.
5. Заполнить столбцы входных переменных наборами значений.
6. Заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью.

Пример 1

Построить таблицу истинности для логического выражения

$$a \vee a \wedge b$$

В данном выражении 2 логические переменные (a , b), 2 логические операции, причем сначала выполняется конъюнкция, а затем дизъюнкция.

1. Количество строк в таблице истинности $2^n = 2^2 = 4$ (+ 1 строка для «шапки»).
2. Количество столбцов – 4 (2 переменные + 2 логические операции)
3. Построить таблицу. Ввести названия столбцов. Учесть порядок выполнения логических операций.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee a \wedge b$

4. Заполнить столбцы значений логических переменных.
Перечислить все возможные сочетания значений логических переменных, причем соответствующие им двоичные числа расположить в порядке возрастания: 00, 01, 10, 11.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee a \wedge b$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

5. Заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя логические операции.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee a \wedge b$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1

Пример 2

Построить таблицу истинности для логического выражения

$$a \wedge (b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a})$$

1. Количество строк в таблице истинности $= 2^n = 2^2 = 4$ (учесть, что нужно добавить еще одну строку для указания названия столбцов)
2. Количество столбцов таблицы истинности $= 2$ (количество логических переменных) $+ 5$ (количество логических операций) $= 7$
3. Определить порядок действий в заданном логическом выражении

$$a \wedge (b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a})$$

5 3 2 4 1

4. Построить таблицу. Ввести названия столбцов. Учесть порядок выполнения логических операций.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$b \vee \bar{b}$	$b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a}$	$a \wedge (b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a})$

5. Заполнить столбцы значений логических переменных.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$b \vee \bar{b}$	$b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a}$	$a \wedge (b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a})$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

6. Заполнить таблицу истинности по столбцам, выполняя логические операции.

a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$b \vee \bar{b}$	$b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a}$	$a \wedge (b \vee \bar{b} \rightarrow \bar{a})$
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Задание 1

Составить таблицы истинности следующих выражений:

1. $\bar{A} \& B$
2. $A \cup \bar{B}$
3. $\overline{\bar{A} \& \bar{B}}$
4. $A \cup B \& \bar{C}$
5. $(A \cup \bar{B}) \& C$
6. $\bar{A} \& B \cup \overline{A \cup B} \cup B$
7. $\overline{A \cup B} \& (A \& \bar{B})$
8. $\overline{A \cup \bar{B}} \cup \bar{A} \& B$
9. $A \& (\bar{B} \cup \bar{C})$
10. $A \cup (\bar{B} \& \bar{C})$

§ 7. Равносильные логические выражения

Логические выражения, у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают, называются **равносильными**.

Для обозначения равносильности логических выражений используется знак « $\equiv$ ».

Например, логические выражения равносильны:

$$\overline{A \& B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \& \neg B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

A	B	$A \cup B$	$\neg(A \cup B)$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Задание 1

Доказать, используя таблицы истинности, что логические выражения равносильны:

1. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$
2. $\overline{A \& B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{\overline{A \cup B}} = A \& B$

§ 8. Законы алгебры логики. Правила преобразования логических выражений

Законы логики отражают наиболее важные закономерности логического мышления. В алгебре логики законы логики записываются в виде формул, которые позволяют проводить преобразования логических выражений. Применение законов логики позволяет сокращать количество переменных в логических выражениях.

1. Закон тождества: $A = A$

Всякое понятие и суждение тождественно самому себе.

2. Закон непротиворечия $\overline{A \& A} = 1$ или $\overline{A} \& A = 0$

Не могут быть одновременно истинными суждение и его отрицание

3. Закон исключенного третьего: $A \& \overline{A} = 1$

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано.

4. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} = A$

Если отрицать дважды некоторое высказывание, то в результате получится исходное высказывание.

5. Переместительный закон (закон коммутативности):

$$A \vee B = B \vee A \qquad A \& B = B \& A$$

При операциях логического умножения или сложения можно менять местами логические переменные.

В математике: $ab = ba$; $a + b = b + a$

6. Сочетательный закон (закон ассоциативности):

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$$

Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или расставлять их произвольно.

В математике: $(ab)c = a(bc)$; $(a+b)+c = a+(b+c)$

7. Распределительный закон (дистрибутивности):

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

В алгебре логики можно выносить за скобки общие множители и общие слагаемые.

В математике за скобки можно выносить только общие множители: $ab + bc = b(a + c)$

8. Законы де Моргана:

$$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B} \quad \overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$$

9. Законы поглощения:

$$A \vee (A \& B) = A \quad A \& (A \vee B) = A$$

10. Законы идемпотентности:

$$A \vee A = A \quad A \& A = A$$

11. Свойства конъюнкции и дизъюнкции:

$$A \vee 0 = A \quad A \& 0 = 0$$

$$A \vee 1 = 1 \quad A \& 1 = A$$

Применение законов алгебры логики для упрощения логических выражений

1. Упростить логическое $(A \& B) \vee (A \& \overline{B})$ выражение:

$$(A \& B) \vee (A \& \overline{B}) = \{7\} = A \& (B \vee \overline{B}) = \{3\} = A \& 1 = A$$

{7} – распределительный закон

{3} – закон исключенного третьего: $B \vee \overline{B} = 1$

Для более наглядного восприятия заданное выражение можно записать, используя математические знаки действий:

$$ab + a\overline{b} = a(b + \overline{b}) = a \cdot 1 = a$$

2. Упростить логическое выражение: $(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$

Способ 1. Применим закон дистрибутивности:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = \{7\} = A \vee (B \wedge \overline{B}) = \{2\} = A \vee 0 = A$$

Способ 2. Перемножим скобки на основании закона дистрибутивности:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \bar{B}) = (A \wedge A) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee (B \wedge \bar{B}) = A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}) \vee 0 = \\ = A \vee A \wedge (B \vee \bar{B}) = A \vee A \wedge 1 = A \vee A = A$$

Запишем данное выражение, используя знаки математических действий:

$$(A + B) * (A + \bar{B}) = A * A + A * B + A * \bar{B} + B * \bar{B} = A + A * (B + \bar{B}) + 0 = A + A * 1 = A + A = A$$

Задание 1

Упростить выражения:

1. $\overline{(\bar{F} \cup F)}$
2. $(A \cup \bar{A}) \& B$
3. $A \& (\overline{A \cup B})$
4. $(A \& B) \cup (A \& \bar{B})$
5. $(A \cup B) \& (A \cup \bar{B})$
6. $A \cup (\bar{A} \& B)$
7. $A \& (\bar{A} \cup B)$
8. $\bar{B} \& (A \cup \overline{A \& B})$
9. $\overline{A \& B} \cup \bar{A}$
10. $\bar{A} \cup A \cup B \cup (A \& B)$
11. $\bar{X} \& (\overline{Y \cup X})$
12. $\bar{B} \& \bar{C} \& (A \cup \bar{A})$
13. $\bar{X} \cup \overline{(X \& Y \& \bar{Y})}$
14. $(A \& B \& \bar{B}) \cup (A \& \bar{A}) \cup (B \& C \& \bar{C})$
15. $A \& (A \cup B) \& (B \cup \bar{B})$
16. $\overline{(A \cup B)} \& (A \& \bar{B})$

§9. Получение логического выражения по таблице истинности

Способ 1

1. Выбрать значения переменных, для которых значение функции равно 1;
2. Записать конъюнкцию всех переменных для каждой строки, где функция равна 1 (если значение переменной равно 0, то берется ее отрицание);
3. Логически сложить полученные выражения;
4. Упростить полученное выражение.

Пример 1.

Определить функцию, которой соответствует заданная таблица истинности.

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

1. Запишем конъюнкции для строк, в которых $F = 1$:

$$\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$$

$$\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c$$

2. Полученные выражения сложим логически.

$$(\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c)$$

3. Упростим логическую функцию

$$(\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b} \wedge c) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee c) = (\bar{a} \wedge \bar{b}) \wedge 1 = \bar{a} \wedge \bar{b} = \overline{a \vee b}$$

4. Итак, логическая функция:

$$\underline{F(a,b,c) = \overline{a \vee b}}$$

Пример 2.

Определить функцию, которой соответствует заданная таблица истинности.

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Запишем конъюнкции для строк, в которых $F = 1$:

$$a \wedge \bar{b} \wedge c$$

$$a \wedge b \wedge c$$

2. Полученные выражения сложим логически.

$$(a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

3. Упростим логическую функцию

$$(a \wedge \bar{b} \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = (a \wedge c) \wedge (\bar{b} \vee b) = a \wedge c \wedge 1 = a \wedge c$$

4. Итак, логическая функция:

$$\underline{F(a, b, c) = a \wedge c}$$

Способ 2

1. Выбрать значения переменных, для которых значение функции равно 0;
2. Записать конъюнкцию всех переменных для каждой строки, где функция равна 0 (если значение переменной равно 0, то берется ее отрицание);
3. Логически сложить полученные выражения;
4. Упростить полученное выражение.
5. Записать инверсию от полученной функции.

Пример 1.

Определить функцию, которой соответствует заданная таблица истинности.

a	b	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

1. Запишем конъюнкции для строк, в которых $F = 0$:

$$a \wedge \bar{b}$$

2. Полученные выражения сложим логически.

$$a \wedge \bar{b}$$

3. Упростим логическую функцию, равную $\bar{F}(a,b)$

$$a \wedge \bar{b}$$

$$\bar{F}(a,b) = a \wedge \bar{b}$$

4. Запишем инверсию для полученной функции

$$F(a,b) = \overline{a \wedge \bar{b}} = \bar{a} \vee \bar{\bar{b}} = \bar{a} \vee b$$

5. Итак, логическая функция:

$$\underline{F(a,b) = \bar{a} \vee b}$$

Пример 2. Определить функцию, которой соответствует заданная таблица истинности.

a	b	c	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

1. Запишем конъюнкции для строк, в которых $F = 0$

$$a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c}$$

$$a \wedge b \wedge \bar{c}$$

2. Полученные выражения сложим логически.

$$a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \vee a \wedge b \wedge \bar{c}$$

3. Упростим логическую функцию

$$\bar{F}(a,b) = a \wedge \bar{b} \wedge \bar{c} \vee a \wedge b \wedge \bar{c} = a \wedge \bar{c} \wedge (\bar{b} \vee b) = a \wedge \bar{c} \wedge 1 = a \wedge \bar{c}$$

4. Запишем инверсию для полученной функции

$$F(a,b) = \overline{\overline{F(a,b)}} = \overline{a \wedge \overline{c}} = \overline{a} \vee c$$

4. Итак, логическая функция:

$$F(a,b) = \overline{a} \vee c$$

Задание 1

1. Символом F обозначена логическая функция от трех аргументов: X , Y , Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F .

Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

2. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	0
1	1	1	0

3. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0

4. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1

5. Символом F обозначена логическая функция от двух аргументов (A и B), заданная таблицей истинности. Какое выражение соответствует F ?

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1) $A \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

2) $A \wedge B$

3) $\neg A \rightarrow B$

4) $\neg A \wedge \neg B$

6. Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X , Y , Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1

1) $X \vee Y \wedge Z$

2) $X \vee Y \vee Z$

3) $X \wedge Y \vee Z$

4) $\neg X \vee$

$\neg Y \wedge \neg Z$

7. Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X , Y , Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

1) $\neg(X \wedge Y) \wedge Z$

2) $\neg(X \vee \neg Y) \vee Z$

3) $\neg(X \wedge Y) \vee Z$

4) $(X \vee Y) \wedge Z$

X	Y	Z	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1

8. Символом F обозначена логическая функция от двух аргументов (A и B), заданная таблицей истинности. Какое выражение соответствует F ?

1) $A \rightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$

2) $A \wedge B$

3) $\neg A \rightarrow B$

4) $\neg A$

$\wedge B$

A	B	F
0	0	0
0	1	1

1	0	1
1	1	1

9. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F (см. таблицу). Какое выражение соответствует F?

- 1) $(X \leftrightarrow Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$ 2) $(\neg X \leftrightarrow Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$
 3) $(X \leftrightarrow \neg Z) \wedge (\neg X \rightarrow Y)$ 4) $(X \leftrightarrow Z) \wedge \neg(Y \rightarrow Z)$

X	Y	Z	F
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	0

10. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

- 1) $X \vee Y \rightarrow Z$ 2) $\neg X \vee Y \rightarrow Z$ 3) $\neg X \wedge Z \rightarrow Y$
 4) $X \vee \neg Z \rightarrow Y$

X	Y	Z	F
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0
0	1	0	1